INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE LORRAINE

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE GEOLOGIE APPLIQUEE ET DE PROSPECTION MINIERE

Concours de 1980

Composition de MATHEMATIQUES

Les candidats sont invités à soigner l'écriture et la présentation. Aucun résultat ne sera pris en considération s'il n'est clairement justifié. On pourra admettre un résultat - à condition de le préciser nettement - pour traiter les questions suivantes. Les deux problèmes sont absolument indépendants.

Premier problème

L'abréviation " v. a. r. " est mise pour " variable aléatoire réelle ". Toutes les v. a. r. du problème sont définies sur un même espace probabilisé (Ω, B, p).

Pour une v. a. r. U, on notera F_U la fonction de répartition c'est-à-dire la fonction telle que, pour tout h réel, $F_U(h)$ soit la probabilité de l'évènement $(U < h)$.

Eventuellement, on notera f_U, $E(U)$, $V(U)$ la densité, l'espérance et la variance de U.

Les études de v. a. r. demandées dans la suite comportent, pour chacune, la détermination de F_U et, éventuellement de f_U, $E(U)$ et $V(U)$. On désigne par φ l'application du segment $[0, 1]$ dans l'ensemble $\{0, 1\}$ définie par :

$$0 \leqslant x < \frac{1}{2}, \quad x \longmapsto \varphi(x) = 0 \; ; \; \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1, \quad x \longmapsto \varphi(x) = 1$$

On désigne par Ψ l'application du segment $[0, 2]$ dans l'ensemble $\{0, 1, 2\}$ définie par :

$$0 \leqslant x < \frac{1}{2}, \quad x \longmapsto \Psi(x) = 0 \; ; \; \frac{1}{2} \leqslant x < \frac{3}{2}, \quad x \longmapsto \Psi(x) = 1 \; ;$$

$$\frac{3}{2} \leqslant x \leqslant 2, \quad x \longmapsto \Psi(x) = 2.$$

X et Y étant deux v. a. r., on désigne par A l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ $\big(X(\omega), Y(\omega)\big)$ pour tout ω de Ω, ensemble A qu'on pourra représenter dans un plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormé. Enfin, lorsqu'interviendra une v. a. r. U_1 fonction d'une autre U, on pourra utiliser le graphique représentant U_1 en fonction de U.

.../...

Première partie. X et Y sont deux v. a. r. indépendantes, chacune de loi uniforme sur $[0 \quad , \quad 1]$.

1°) Etudier les v. a. r. suivantes :

a) $D_X = X - \varphi(X)$; $D_Y = Y - \varphi(Y)$

b) $D = D_X + D_Y$;

c) $D' = |D|$; ($|D|$ est la valeur absolue de D)

déterminer le réel h tel que $F_{D'}(h) = \frac{1}{2}$

d) $S = X + Y$

2°) a) Dans quel ensemble la v. a. r. $\Delta = \Psi(X + Y) - [\varphi(X) + \varphi(Y)]$ prend-elle ses valeurs ? Déterminer les sous ensembles de A correspondant à chacune des valeurs de Δ .

b) Etudier Δ .

c) Etudier $D_S = S - \Psi(S)$, puis $D'_S = |D_S|$.

d) Comparer, pour tout h réel , $F_{D'_S}(h)$ et $F_{D'}(h)$.

Deuxième partie. Soit Z une v. a. r. prenant ses valeurs dans l'ensemble $\{-1 \quad , \quad +1\}$ et telle que les probabilités des évènements $(Z = -1)$ et $(Z = +1)$ soient respectivement q et $1 - q$ où q est un réel donné vérifiant $0 < q < 1$.

T_1 et T_2 sont deux v. a. r. indépendantes. Etudier U fonction de Z définie comme suit :

$$Z = -1 \implies U = T_1 \; ; \quad Z = +1 \implies U = T_2$$

en se bornant aux deux cas suivants :

1°) T_1 suit une loi uniforme sur le segment $[-3 \quad , \quad 1]$, et T_2 une loi uniforme sur le segment $[-1 \quad , \quad 3]$.

2°) T_1 et T_2 suivent des lois normales avec $V(T_1) = V(T_2) = 1$.

$E(T_1) = -1$, $E(T_2) = 1$.

.../...

Deuxième problème

Dans tout le problème, x est une variable réelle non négative. On envisage une famille de fonctions f_a dépendant d'un paramètre a pouvant prendre toute valeur réelle et définies comme suit :

$$\forall\, x>0 \qquad f_a(x) = x^a\, e^{-\frac{1}{x}} \qquad ; \; f_a(0) = 0$$

1°) Etudier la continuité à droite au point $x = 0$.

2°) Démontrer que, pour tout entier positif n , et pour tout x strictement positif, la dérivée d'ordre n de $f_a(x)$ est de la forme

$$x^{a-2n}\, e^{-\frac{1}{x}}\, P_{(a,n)}(x)$$

où $P_{(a,n)}$ est un polynome de degré inférieur ou égal à n .

3°) Exprimer $P_{(a,n+1)}(x)$ en fonction de x, a, n, $P_{(a,n)}(x)$ et $P'_{(a,n)}(x)$, où $P'_{(a,n)}(x)$ est la dérivée de $P_{(a,n)}(x)$.

4°) Dans cette question seulement, on suppose $a = 2$. Calculer $P_{(2,1)}$, $P_{(2,2)}$, $P_{(2,3)}$, $P_{(2,4)}$. Préciser, pour tout entier n positif, les termes de plus fort et de plus bas degré de $P_{(2,n)}(x)$.

5°) Etudier, au point $x = 0$, les dérivées à droite successives de f_a .

6°) Montrer que la relation $F_a(x) = \int_0^x t^a e^{-\frac{1}{t}}\, dt$ détermine une fonction F_a définie pour tout x non négatif. (On ne cherchera pas à calculer une primitive de $t^a\, e^{-\frac{1}{t}}$).

Démontrer que $F_a(x) = x^{a+2}\, e^{-\frac{1}{x}} - (a+2)\; F_{a+1}(x)$,

7°) Démontrer la relation $0 \leqslant F_{a+1}(x) \leqslant x\, F_a(x)$

8°) Montrer que, quand x tend vers zéro par valeurs positives, les deux fonctions $F_a(x)$ et $f_{a+2}(x)$ sont des infiniment petits équivalents.

---ooOoo---

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail